Theorie des mehrdimensionalen Kalmanfilters

Markus Krug, Johannes Mühr

Erinnerung an den eindimensionalen Fall

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}

Erinnerung an den eindimensionalen Fall

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}
2. Bestimmen der ersten Messung $\hat{x}(t_0)$ als beste Positionsschätzung

Erinnerung an den eindimensionalen Fall

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}
2. Bestimmen der ersten Messung $\hat{x}(t_0)$ als beste Positionsschätzung
3. Errechnen der Prognose $\hat{x}^-_{t+1}$, kurz vor der nächsten Messung $t+1$

Erinnerung an den eindimensionalen Fall

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}
2. Bestimmen der ersten Messung $\hat{x}(t_0)$ als beste Positionsschätzung
3. Errechnen der Prognose $\hat{x}^-_{t+1}$, kurz vor der nächsten Messung $t+1$
4. Bestimmen des Kalmangains K_{t+1}

Erinnerung an den eindimensionalen Fall

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}
2. Bestimmen der ersten Messung $\hat{x}(t_0)$ als beste Positionsschätzung
3. Errechnen der Prognose $\hat{x}_{t+1}^-$, kurz vor der nächsten Messung $t+1$
4. Bestimmen des Kalmangains K_{t+1}
5. Korrektur der Prognose des aktuellen besten Zustandes $\hat{x}_{t+1}$

Analogien - Schritt 1

- im Allgemeinen errechnet sich die Modellgröße mit Hilfe eines Zustandsraummodells, in diesem Fall einem diskreten

$$x_t = \mathbf{F}_t \vec{x}_{t-1} + \vec{w}_t \quad \text{(Zustandsgleichung)}$$
$$y_t = \mathbf{H}_t \vec{x}_t + \vec{v}_t \quad \text{(Ausgabegleichung)}$$

Analogien - Schritt 1

- im Allgemeinen errechnet sich die Modellgröße mit Hilfe eines Zustandsraummodells, in diesem Fall einem diskreten

$$x_t = \mathbf{F}_t \vec{x}_{t-1} + \vec{w}_t \quad \text{(Zustandsgleichung)}$$
$$y_t = \mathbf{H}_t \vec{x}_t + \vec{v}_t \quad \text{(Ausgabegleichung)}$$

- Linearer Charakter durch Matrixmultiplikation

Analogien - Schritt 1

- im Allgemeinen errechnet sich die Modellgröße mit Hilfe eines Zustandsraummodells, in diesem Fall einem diskreten

$$x_t = \mathbf{F}_t \vec{x}_{t-1} + \vec{w}_t \quad \text{(Zustandsgleichung)}$$
$$y_t = \mathbf{H}_t \vec{x}_t + \vec{v}_t \quad \text{(Ausgabegleichung)}$$

- Linearer Charakter durch Matrixmultiplikation
- $\vec{w}_t$ beschreibt dabei das Rauschen oder die Störung im System

- im Allgemeinen errechnet sich die Modellgröße mit Hilfe eines Zustandsraummodells, in diesem Fall einem diskreten

$$
\begin{aligned}
x_t &= \mathbf{F}_t \vec{x}_{t-1} + \vec{w}_t \quad \text{(Zustandsgleichung)} \\
y_t &= \mathbf{H}_t \vec{x}_t + \vec{v}_t \quad \text{(Ausgabegleichung)}
\end{aligned}
$$

- Linearer Charakter durch Matrixmultiplikation
- $\vec{w}_t$ beschreibt dabei das Rauschen oder die Störung im System
- $\vec{v}$ beschreibt die Messfehler der Sensoren

Analogien - Schritt 2

- Auch hier wird der Vektor $\hat{x}_0$ der unmittelbar durch die erste Messung entsteht als beste Schätzung benutzt

Analogien - Schritt 2

- Auch hier wird der Vektor $\hat{x}_0$ der unmittelbar durch die erste Messung entsteht als beste Schätzung benutzt
- nun neu: nichtmehr durch Standardabweichung, sondern durch Kovarianzmatrizen beschrieben $\mathbf{P}$

Analogien - Schritt 3

- Kann direkt aus dem Zustandsraummodell abgeleitet werden:

$$x_t^- = \mathbf{F}_t \hat{x}_{t-1}$$

- Die Systemstörung $\vec{w}$ beeinflusst dabei die zugehörige Aposteriori Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_t^-$

Analogien - Schritt 4 -Kalmangain

- sehr viel Arbeit nötig, um diesen im mehrdimensionalen abzuleiten - dazu später mehr

Analogien - Schritt 4 -Kalmangain

- sehr viel Arbeit nötig, um diesen im mehrdimensionalen abzuleiten - dazu später mehr
- Erinnerung, Kalmanfilter schätzt Gleichzeitig unter anderem Mittelwert und Least Squares

Analogien - Schritt 4 -Kalmangain

- sehr viel Arbeit nötig, um diesen im mehrdimensionalen abzuleiten - dazu später mehr
- Erinnerung, Kalmanfilter schätzt Gleichzeitig unter anderem Mittelwert und Least Squares
- im eindimensionalen Fall Herleitung über Gaußgleichungen und einfaches ablesen des Mittelwerts und Standardabweichung

Analogien - Schritt 4 -Kalmangain

- sehr viel Arbeit nötig, um diesen im mehrdimensionalen abzuleiten - dazu später mehr
- Erinnerung, Kalmanfilter schätzt Gleichzeitig unter anderem Mittelwert und Least Squares
- im eindimensionalen Fall Herleitung über Gaußgleichungen und einfaches ablesen des Mittelwerts und Standardabweichung
- Auch möglich im allgemeinen Fall, aber sehr schwierig, daher dieses mal Fokus auf minimierung der Fehlerquadrate.

Analogien - Schritt 5 -Aposteriori

- Vergleich mit eindimensionaler Gleichung:

$$\hat{x}_t = x_t^- + K_t \cdot [z_t - x_t^-] \text{ Mittelwertgleichung}$$

- Vergleich mit eindimensionaler Gleichung:

$$\hat{x}_t = \underbrace{x_t^-}_{\text{bekannt durch Apriori Gleichung}} + K_t \cdot [z_t - x_t^-] \text{ Mittelwertgleichung}$$

- Vergleich mit eindimensionaler Gleichung:

$$\hat{x}_t = x_t^- + \underbrace{K_t}_{\text{nun eine Matrix } \mathbf{K}_t} \cdot [z_t - x_t^-] \text{ Mittelwertgleichung}$$

- Vergleich mit eindimensionaler Gleichung:

$$\hat{x}_t = x_t^- + K_t \cdot [\underbrace{z_t}_{\text{Zustandsraummodell } y_t} - x_t^-] \text{ Mittelwertgleichung}$$

Analogien - Schritt 5 -Aposteriori

- Vergleich mit eindimensionaler Gleichung:

$$\hat{x}_t = x_t^- + K_t \cdot [z_t - x_t^-] \text{ Mittelwertgleichung}$$

- liefert die mehrdimensionale Gleichung:

$$\hat{x}_t = x_t^- + \mathbf{K}_t \cdot [y_t - \mathbf{H}_t x_t^-] \text{ Mittelwertgleichung}$$

Analogien - Schritt 5 -Aposteriori

- Vergleich mit eindimensionaler Gleichung:

$$\hat{x}_t = x_t^- + K_t \cdot [z_t - x_t^-] \text{ Mittelwertgleichung}$$

- liefert die mehrdimensionale Gleichung:

$$\hat{x}_t = x_t^- + \mathbf{K}_t \cdot [y_t - \mathbf{H}_t x_t^-] \text{ Mittelwertgleichung}$$

- $\mathbf{H}_t$ nötig, da die Vektoren x_t und y_t keineswegs die selbe Dimension besitzen müssen!

Das ist noch nicht alles...

- Bisher noch unbekannt sind zum einen die Kovarianzmatrizen zum Apriori $\mathbf{P}_t^-$ und zum Aposteriorizustand $\mathbf{P}_t$

Das ist noch nicht alles...

- Bisher noch unbekannt sind zum einen die Kovarianzmatrizen zum Apriori $\mathbf{P}_t^-$ und zum Aposteriorizustand $\mathbf{P}_t$
- Sowie die Berechnung des Kalmangains $\mathbf{K}_t$

Das ist noch nicht alles...

- Bisher noch unbekannt sind zum einen die Kovarianzmatrizen zum Apriori $\mathbf{P}_t^-$ und zum Aposteriorizustand $\mathbf{P}_t$
- Sowie die Berechnung des Kalmangains $\mathbf{K}_t$
- Berechnung über Abschätzung der kleinsten Fehlerquadrate.

Erinnerung: Kovarianzmatrizen

Aus der Stochastik:

Die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors berechnet sich gemäß:

$$Cov(X) = E[(X - \mu) \cdot (X - \mu)^T]$$

Erinnerung: Kovarianzmatrizen

Aus der Stochastik:

Die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors berechnet sich gemäß:

$$Cov(X) = E[(X - \mu) \cdot (X - \mu)^T]$$

- In unserem Fall ist X der Vektor x und stellt die unbeobachtbaren wahren Werte unseres Systems dar

Erinnerung: Kovarianzmatrizen

Aus der Stochastik:

Die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors berechnet sich gemäß:

$$Cov(X) = E[(X - \mu) \cdot (X - \mu)^T]$$

- In unserem Fall ist X der Vektor x und stellt die unbeobachtbaren wahren Werte unseres Systems dar
- μ ist die jeweilige beste Schätzung zum gegebenen Zeitpunkt

Erinnerung: Kovarianzmatrizen

Aus der Stochastik:

Die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors berechnet sich gemäß:

$$Cov(X) = E[(X - \mu) \cdot (X - \mu)^T]$$

- In unserem Fall ist X der Vektor x und stellt die unbeobachtbaren wahren Werte unseres Systems dar
- μ ist die jeweilige beste Schätzung zum gegebenen Zeitpunkt
- Wichtig: Varianzen der einzelnen Einträge des Vektors x befinden sich auf der Hauptdiagonalen!

Erinnerung: Kovarianzmatrizen

- Wir unterscheiden daher zwei Kovarianzmatrizen:

$$\mathbf{P}_t = E[((x_t - \hat{x}_t) \cdot (x_t - \hat{x}_t^-)^T] \text{ Aposteriori}$$

$$\mathbf{P}_t^- = E[((x_t - x_t^-) \cdot (x_t - x_t^-)^T] \text{ Apriori}$$

Berechnung von $\mathbf{P}_t$

- Einsetzen der Aposteriori Gleichung in die Definition liefert:

$$\mathbf{P}_t = E[((x_t - \hat{x}_t) \cdot (x_t - \hat{x}_t^-)^T]$$

mit:

$$\hat{x}_t = x_t^- + \mathbf{K}_t \cdot [y_t - \mathbf{H}_t x_t^-]$$

Berechnung von $\mathbf{P}_t$

- Einsetzen der Aposteriori Gleichung in die Definition :

$$\mathbf{P}_t = E[((x_t - \hat{x}_t) \cdot (x_t - \hat{x}_t^-)^T]$$

mit:

$$\hat{x}_t = x_t^- + \mathbf{K}_t \cdot [y_t - \mathbf{H}_t x_t^-]$$

- und anschließendem Ausklammern liefert:

$$= E[((\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t) \cdot (x_t - x_t^-) - \mathbf{K}_t \vec{v}_t) \cdot ((\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t) \cdot (x_t - x_t^-) - \mathbf{K}_t \vec{v}_t)^T]$$

Berechnung von $\mathbf{P}_t$

$$= E[((\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t) \cdot (x_t - x_t^-) - \mathbf{K}_t\vec{v}_t) \cdot ((\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t) \cdot (x_t - x_t^-) - \mathbf{K}_t\vec{v}_t)^T]$$

- Ausmultiplizieren liefert:

$$\begin{aligned}
&= E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)(x_t - x_t^-)(x_t - x_t^-)^T(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T \\
&- \mathbf{K}_t\vec{v}_t(x_t - x_t^-)^T(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T \\
&- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)(x_t - x_t^-)(\mathbf{K}_t\vec{v}_t)^T \\
&+ \mathbf{K}_t\vec{v}_t(\mathbf{K}_t\vec{v}_t)^T]
\end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswertes:

- erster Term:

$$= E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)(x_t - x_t^-)(x_t - x_t^-)^T(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T] + ...$$

- Konstanten aus dem Erwartungswert nehmen bringt:

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)E[(x_t - x_t^-)(x_t - x_t^-)^T](\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T$$

- erster Term:

$$= E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)(x_t - x_t^-)(x_t - x_t^-)^T(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T] + \ldots$$

- Konstanten aus dem Erwartungswert nehmen bringt:

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)\underbrace{E[(x_t - x_t^-)(x_t - x_t^-)^T]}_{\mathbf{P}_t^-}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T$$

Linearität des Erwartungswertes:

- erster Term:

$$= E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)(x_t - x_t^-)(x_t - x_t^-)^T(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T] + \ldots$$

- Konstanten aus dem Erwartungswert nehmen bringt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)E[(x_t - x_t^-)(x_t - x_t^-)^T](\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)\mathbf{P}_t^-(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T \end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswertes:

- zweiter Term:

$$\ldots - E[\mathbf{K}_t \vec{v}_t (x_t - x_t^-)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T] + \ldots$$

- Konstanten aus dem Erwartungswert nehmen bringt:

$$= \mathbf{K}_t \cdot E[\vec{v}_t (x_t - x_t^-)^T] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T$$
$$= \mathbf{K}_t \cdot E[(\vec{v}_t - \vec{0})(x_t - x_t^-)^T] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T$$

- zweiter Term:

$$\ldots - E[\mathbf{K}_t \vec{v}_t (x_t - x_t^-)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T] + \ldots$$

- Konstanten aus dem Erwartungswert nehmen bringt:

$$= \mathbf{K}_t \cdot E[\vec{v}_t (x_t - x_t^-)^T](\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T$$
$$= \mathbf{K}_t \cdot \underbrace{E[(\vec{v}_t - \vec{0})(x_t - x_t^-)^T]}_{\text{Abhängigkeit } x_t \text{ und } \vec{v}_t}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T$$

- zweiter Term:

$$\dots - E[\mathbf{K}_t \vec{v}_t (x_t - x_t^-)^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T] + \dots$$

- Konstanten aus dem Erwartungswert nehmen bringt:

$$= \mathbf{K}_t \cdot E[\vec{v}_t (x_t - x_t^-)^T](\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T$$
$$= \mathbf{K}_t \cdot \underbrace{E[(\vec{v}_t - \vec{0})(x_t - x_t^-)^T]}_{\text{Abhängigkeit } x_t \text{ und } \vec{v}_t}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^T$$

- Annahme x_t und v_t sind unabhängig! $\Rightarrow E[vx^T] = 0$

- dritter Term mit analoger Begründung zum zweiten Term $= 0$!.

Linearität des Erwartungswertes:

- der vierte Term:

$$
\begin{aligned}
&... + E[\mathsf{K}_t \vec{v}_t (\mathsf{K}_t \vec{v}_t)^T] \\
&= E[\mathsf{K}_t \vec{v}_t \vec{v}_t^T \mathsf{K}_t^T] \\
&= \mathsf{K}_t E[\vec{v}_t \vec{v}_t^T] \mathsf{K}_t^T
\end{aligned}
$$

- der vierte Term:

$$
\begin{aligned}
&\ldots + E[\mathbf{K}_t \vec{v}_t (\mathbf{K}_t \vec{v}_t)^T] \\
&= E[\mathbf{K}_t \vec{v}_t \vec{v}_t^T \mathbf{K}_t^T] \\
&= \mathbf{K}_t \underbrace{E[\vec{v}_t \vec{v}_t^T]}_{\mathbf{V}_t} \mathbf{K}_t^T
\end{aligned}
$$

Zusammenfassen

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)\mathbf{P}_t^-(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T + \mathbf{K}_t\mathbf{V}_t\mathbf{K}_t^T$$

- ausmultiplizieren und vereinfachen:

Zusammenfassen

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)\mathbf{P}_t^-(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t)^T + \mathbf{K}_t\mathbf{V}_t\mathbf{K}_t^T$$

- ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T\mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^- + \mathbf{K}_t(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t)\mathbf{K}_t^T$$

Zusammenfassen

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T\mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^- + \mathbf{K}_t(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t)\mathbf{K}_t^T$$

- Erinnerung - optimaler Kalmanfilter errechnet den Gain $\mathbf{K}_t$ so, dass die Varianzen von x in $\mathbf{P}_t$ minimal werden

Zusammenfassen

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T \mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t) \mathbf{K}_t^T$$

- Erinnerung - optimaler Kalmanfilter errechnet den Gain $\mathbf{K}_t$ so, dass die Varianzen von x in $\mathbf{P}_t$ minimal werden
- Varianzen von x befinden sich in der Spur von $\mathbf{P}_t$!

Zusammenfassen

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T\mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^- + \mathbf{K}_t(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t)\mathbf{K}_t^T$$

- Erinnerung - optimaler Kalmanfilter errechnet den Gain $\mathbf{K}_t$ so, dass die Varianzen von x in $\mathbf{P}_t$ minimal werden
- Varianzen von x befinden sich in der Spur von $\mathbf{P}_t$!
- Gefordert ist also $\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} Spur\left(\mathbf{P}_t\right) \stackrel{!}{=} 0$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T \mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t) \mathbf{K}_t^T$$

- Wir benutzen folgende Ableitungsregeln:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} Spur\left(\mathbf{XAX}^T\right) = \mathbf{X}(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} Spur\left(\mathbf{XA}\right) = \mathbf{A}^T$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} Spur\left(\mathbf{AX}^T\right) = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T\mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^- + \mathbf{K}_t(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t)\mathbf{K}_t^T$$

- Und erhalten:

$$0 = \mathbf{K}_t[\mathbf{H}_t(\mathbf{P}_t^-)^T\mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t^T + \mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t] - \mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T - (\mathbf{P}_t^-)^T\mathbf{H}_t^T$$

Der Kalmangain

$$0 = \mathbf{K}_t[\mathbf{H}_t(\mathbf{P}_t^-)^T\mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t^T + \mathbf{H}_t\mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t] - \mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T - (\mathbf{P}_t^-)^T\mathbf{H}_t^T$$

- mit der Eigenschaft der symmetrischen Kovarianzmatrizen $(\mathbf{P}_t^-)^T = \mathbf{P}_t^-$ und $\mathbf{V}_t^T = \mathbf{V}_t$ gilt:

$$0 = \mathbf{K}_t[2\mathbf{H}_t(\mathbf{P}_t^-)\mathbf{H}_t^T + 2\mathbf{V}_t] - 2\mathbf{P}_t^-\mathbf{H}_t^T$$

Der Kalmangain

- Wir erhalten also für den allgemeinen Fall den Kalmangain gemäß:

Der Kalmangain

$$\mathbf{K}_t = \frac{\mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T}{\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t}$$

Der Kalmangain

- Wir erhalten also für den allgemeinen Fall den Kalmangain gemäß:

Der Kalmangain

$$\mathbf{K}_t = \frac{\mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T}{\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t}$$

- Es bleibt die Berechnung von $\mathbf{P}_t$ und von $\mathbf{P}_t^-$

Die Aposteriori Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_t$

- Einsetzen des Kalmangains in die nicht abgeleitete Formel für $\mathbf{P}_t$:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T}{\mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t}$$

- in:

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T \mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{V}_t) \mathbf{K}_t^T$$

Die Aposteriori Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_t$

- Liefert letztenendes:

Die Aposteriori Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)\mathbf{P}_t^-$$

Die Aposteriori Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_t$

- Liefert letztenendes:

Die Aposteriori Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)\mathbf{P}_t^-$$

- gleich geschafft es fehlt nur noch $\mathbf{P}_t^-$

Die Apriori Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_t$

$$\mathbf{P}_{t+1}^{-} = E[((x_t - \underbrace{x_t^{-}}_{\mathbf{F}_{t+1}\hat{x}_t}) \cdot (x_t - x_t^{-})^T]$$

$$\vdots$$

Die Aposteriori Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_t^{-}$

$$\mathbf{P}_t^{-} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{W}_t$$

Der Zyklus ist geschlossen!

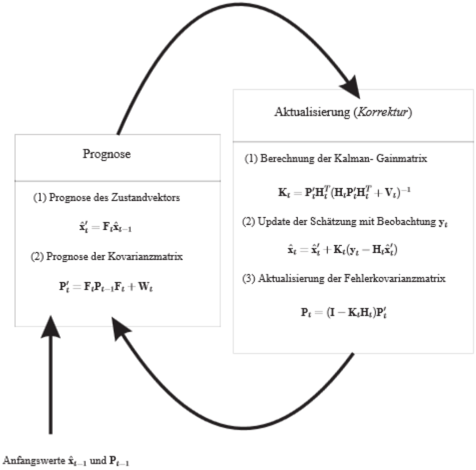

Abbildung : Der Kalman-Zyklus