Eindimensionale Applikation eines Kalmanfilters

Markus Krug, Johannes Mühr

25. Juli 2013

Inhalt der eindimensionalen Filterung

- Szenario

Inhalt der eindimensionalen Filterung

- Szenario
- Herleitung der Filtergleichungen

Szenario

- Wir befinden uns mit einem Quadrocopter in einem verrauchten Gebäude, Ziel des ganzen ist es nunmehr zu vermeiden, gegen die Decke zu fliegen. Dafür wird der Kalmanfilter genutzt um eine optimale Schätzung unserer nun eindimensionalen Position durchzuführen. Zum Messen unserer Höhe haben wir Ultraschallsensoren an Board.

Aller Anfang ist...

- Zunächst er halten wir mit unserem Sensor eine Startmessung zum Zeitpunkt t_0.

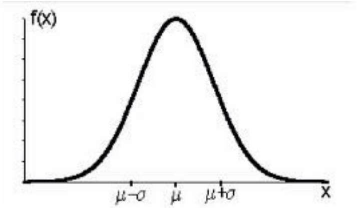

Abbildung : Gauß-Verteilung

Aller Anfang ist...

- Zunächst er halten wir mit unserem Sensor eine Startmessung zum Zeitpunkt t_0.
- Messung ist nicht fehlerfrei, gaußverteilte Messung mit Mittelwert μ_0 und Varianz σ_0^2

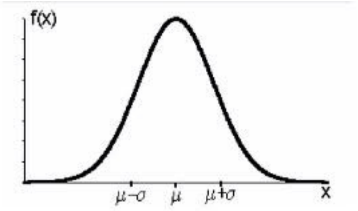

Abbildung : Gauß-Verteilung

Schätzung nach der ersten Messung

- beste Positionsschätzung nach der ersten Messung $\hat{x} = \mu_0$

Schätzung nach der ersten Messung

- beste Positionsschätzung nach der ersten Messung $\hat{x} = \mu_0$
- Mittelwert dabei simultan Modus, Median, und beste Schätzung gemäß kleinster Quadrate

Integrieren einer zweiten Messung

- nun erhalten wir eine zweite Messung zum Zeitpunkt t_1. Wir haben uns der Einfachheit nicht bewegt.

Integrieren einer zweiten Messung

- nun erhalten wir eine zweite Messung zum Zeitpunkt t_1. Wir haben uns der Einfachheit nicht bewegt.
- Der Infrarotsensor liefert dabei eine zuverlässigere Messung, also:

Integrieren einer zweiten Messung

- nun erhalten wir eine zweite Messung zum Zeitpunkt t_1. Wir haben uns der Einfachheit nicht bewegt.
- Der Infrarotsensor liefert dabei eine zuverlässigere Messung, also:
- $$N(\mu_1, \sigma_1)$$

Integrieren einer zweiten Messung

- nun erhalten wir eine zweite Messung zum Zeitpunkt t_1. Wir haben uns der Einfachheit nicht bewegt.
- Der Infrarotsensor liefert dabei eine zuverlässigere Messung, also:
- $$N(\mu_1, \sigma_1)$$
- dabei ist $\sigma_1 < \sigma_0$

Integrieren einer zweiten Messung

- nun erhalten wir eine zweite Messung zum Zeitpunkt t_1. Wir haben uns der Einfachheit nicht bewegt.
- Der Infrarotsensor liefert dabei eine zuverlässigere Messung, also:
- $$N(\mu_1, \sigma_1)$$
- dabei ist $\sigma_1 < \sigma_0$
- Frage: Wie sieht unsere beste Schätzung nach nun 2 bekannten Messungen aus ?

Integrieren einer zweiten Messung

- gesucht: resultierende Gaußverteilung mit 2 bekannten Messungen
- Annahme: Die Messungen sind unabhängig voneinander

Aus der Stochastik:

Die resultierende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f(x,y) ist gleich der Multiplikation der Randverteilungsfunktionen:

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$

Integrieren einer zweiten Messung

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right)}$$

$$f(y) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)}$$

Integrieren einer zweiten Messung

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right)}$$

$$f(y) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)}$$

- dabei stellt α eine Normalisierungskonstante dar.

Integrieren einer zweiten Messung

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right)}$$

$$f(y) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)}$$

- dabei stellt α eine Normalisierungskonstante dar.
- Betrachtung des Exponenten *exp*

Integrieren einer zweiten Messung

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right)}$$
$$f(y) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)}$$

- dabei stellt α eine Normalisierungskonstante dar.
- Betrachtung des Exponenten *exp*
- Da wir uns nicht bewegt haben, gilt $x = y$

Integrieren einer zweiten Messung

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{(Betrachtung des Exponenten)}$$

$$exp = -\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)$$

Integrieren einer zweiten Messung

$$exp = -\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 + \sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right)$$

Integrieren einer zweiten Messung

$$exp = -\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 + \sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right) \cdot \quad \frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 + \sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}\right)$$

Integrieren einer zweiten Messung

$$exp = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right) \cdot \quad \frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 + \sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}\right)$$

Integrieren einer zweiten Messung

$$exp = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right) \cdot \quad \frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 + \sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}\right)$$

- Vergleich mit normaler Gaußverteilung

Integrieren einer zweiten Messung

$$exp = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sigma_0^2+\sigma_1^2}{\sigma_0^2\cdot\sigma_1^2}\right)\cdot \quad \frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2+\sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}\right)$$

- Vergleich mit normaler Gaußverteilung

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)}$$

$$exp = -\frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{\sigma_0^2+\sigma_1^2}{\sigma_0^2\cdot\sigma_1^2}\right)}_{\frac{1}{\sigma^2}}\cdot\quad\frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2+\sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}\right)$$

- Vergleich mit normaler Gaußverteilung

$$f(x) = \alpha\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu^2}{\sigma^2}\right)}$$

- Standardabweichung der neuen Verteilung $\hat{\sigma}$ berechnet sich aus:

- Standardabweichung der neuen Verteilung $\hat{\sigma}$ berechnet sich aus:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} = \left(\frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_1^2}$$

Integrieren einer zweiten Messung

- Standardabweichung der neuen Verteilung $\hat{\sigma}$ berechnet sich aus:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} = \left(\frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right) = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_1^2}$$

- neue Standardabweichung kleiner als die jeweils einzelnen Standardabweichungen zuvor.

neue Standardabweichung

- Standardabweichung der neuen Verteilung $\hat{\sigma}$ berechnet sich aus:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} = \left(\frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}\right) = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_1^2}$$

- neue Standardabweichung kleiner als die jeweils einzelnen Standardabweichungen zuvor.
- Wir werden uns unserer eigenen Position „sicherer“

- Wir betrachten nun noch den Rest des Exponenten exp_r um den neuen Mittelwert $\hat{\mu}$ zu berechnen.

$$exp_r = \frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 + \sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}$$

- Wir betrachten nun noch den Rest des Exponenten exp_r um den neuen Mittelwert $\hat{\mu}$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} exp_r &= \frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 + \sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \\ &= \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_0^2}}_{=a} \cdot (x-\mu_0)^2 + \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2 + \sigma_0^2}}_{=b} \cdot (x-\mu_1)^2 \end{aligned}$$

- Wir betrachten nun noch den Rest des Exponenten exp_r um den neuen Mittelwert $\hat{\mu}$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} exp_r &= \frac{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 + \sigma_0^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2} \\ &= \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_0^2}}_{=a} \cdot (x-\mu_0)^2 + \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2+\sigma_0^2}}_{=b} \cdot (x-\mu_1)^2 \\ &= a(x-\mu_0)^2 + b(x-\mu_1)^2 \end{aligned}$$

neuer Mittelwert

$$
\begin{aligned}
exp_r &= a(x-\mu_0)^2 + b(x-\mu_1)^2 \\
&= ax^2 - 2a\mu_0 x + a\mu_0^2 + bx^2 - 2b\mu_1 x + b\mu_1^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} exp_r &= a(x-\mu_0)^2 + b(x-\mu_1)^2 \\ &= ax^2 - 2a\mu_0 x + a\mu_0^2 + bx^2 - 2b\mu_1 x + b\mu_1^2 \\ &= (a+b)x^2 - 2(a\mu_0 + b\mu_1)x + (a\mu_0^2 + b\mu_1^2) \end{aligned}$$

neuer Mittelwert

$$
\begin{aligned}
exp_r &= a(x-\mu_0)^2 + b(x-\mu_1)^2 \\
&= ax^2 - 2a\mu_0 x + a\mu_0^2 + bx^2 - 2b\mu_1 x + b\mu_1^2 \\
&= \underbrace{(a+b)}_{=1} x^2 - 2(a\mu_0 + b\mu_1)x + (a\mu_0^2 + b\mu_1^2)
\end{aligned}
$$

neuer Mittelwert

$$
\begin{aligned}
exp_r &= a(x-\mu_0)^2 + b(x-\mu_1)^2 \\
&= ax^2 - 2a\mu_0 x + a\mu_0^2 + bx^2 - 2b\mu_1 x + b\mu_1^2 \\
&= \underbrace{(a+b)}_{=1} x^2 - 2(a\mu_0 + b\mu_1)x + (a\mu_0^2 + b\mu_1^2) \\
&= (x-(a\mu_0 + b\mu_1))^2 - (a\mu_0 + b\mu_1)^2 + (a\mu_0^2 + b\mu_1^2)
\end{aligned}
$$

neuer Mittelwert

$$
\begin{aligned}
exp_r &= a(x-\mu_0)^2 + b(x-\mu_1)^2 \\
&= ax^2 - 2a\mu_0 x + a\mu_0^2 + bx^2 - 2b\mu_1 x + b\mu_1^2 \\
&= \underbrace{(a+b)}_{=1} x^2 - 2(a\mu_0 + b\mu_1)x + (a\mu_0^2 + b\mu_1^2) \\
&= (x - \underbrace{(a\mu_0 + b\mu_1)}_{=\hat{\mu}})^2 - \underbrace{(a\mu_0 + b\mu_1)^2 + (a\mu_0^2 + b\mu_1^2)}_{\text{unabhängig von x fließt in Konstante } \alpha}
\end{aligned}
$$

neuer Mittelwert

$$\hat{\mu} = (a\mu_0 + b\mu_1)$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_0^2} \cdot \mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2 + \sigma_0^2} \cdot \mu_1$$

neuer Mittelwert

$$\hat{\mu} = (a\mu_0 + b\mu_1)$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_0^2} \cdot \mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2 + \sigma_0^2} \cdot \mu_1$$

- Spezialfall: beide Messungen gleiche Verteilungen $\Rightarrow$ Durchschnitt als neue Position

erste eindimensionale Kalmangleichung

- die nun erhaltenen Gleichungen müssen noch in die von Kalman vorgeschlagene Form gebracht werden

erste eindimensionale Kalmangleichung

- Varianz:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}$$

erste eindimensionale Kalmangleichung

- Varianz:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_0^2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}$$

- Einführung der Konstante K (Kalmangain)

$$K = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}$$

- Varianz:

$$\hat{\sigma} = K \cdot \sigma_1^2$$

erste eindimensionale Kalmangleichung

- Varianz:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= K \cdot \sigma_1^2 \\ &= (1 - K) \cdot \sigma_0^2\end{aligned}$$

erste eindimensionale Kalmangleichung

- Varianzgleichung:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= K \cdot \sigma_1^2 \\ &= (1 - K) \cdot \sigma_0^2 \\ &= \sigma_0^2 - K\sigma_0^2\end{aligned}$$

erste eindimensionale Kalmangleichung

- Mittelwertgleichung:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_0^2}\cdot\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2+\sigma_0^2}\cdot\mu_1 \\ &= K\mu_1 + (1-K)\mu_0\end{aligned}$$

erste eindimensionale Kalmangleichung

- Mittelwertgleichung:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_0^2}\cdot\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2+\sigma_0^2}\cdot\mu_1 \\ &= K\mu_1 + (1-K)\mu_0 \\ &= \mu_0 + K(\mu_1-\mu_0)\end{aligned}$$

Kleine Zusammenfassung

- Wir haben nun gelernt wie wir zwei Gaußverteilungen zu einer resultierenden Gaußverteilung aktualisieren

Kleine Zusammenfassung

- Wir haben nun gelernt wie wir zwei Gaußverteilungen zu einer resultierenden Gaußverteilung aktualisieren
- Allerdings: Einschränkung auf eine Bewegungslosigkeit zwischen den Messungen.

Kleine Zusammenfassung

- Wir haben nun gelernt wie wir zwei Gaußverteilungen zu einer resultierenden Gaußverteilung aktualisieren
- Allerdings: Einschränkung auf eine Bewegungslosigkeit zwischen den Messungen.
- Jetzt: Bewegung zwischen den Messungen

neues Szenario-mit Bewegung

- Unser Quadrocopter bleibt nun nicht mehr zwischen den Messungen am selben Ort, sondern er bewegt sich mit der Geschwindigkeit u

- Unser Quadrocopter bleibt nun nicht mehr zwischen den Messungen am selben Ort, sondern er bewegt sich mit der Geschwindigkeit u
- Daher muss sich der Glaube an unsere wahrscheinlichste Position bereits **zwischen den Messungen** ändern

neues Szenario-mit Bewegung

- Unser Quadrocopter bleibt nun nicht mehr zwischen den Messungen am selben Ort, sondern er bewegt sich mit der Geschwindigkeit u
- Daher muss sich der Glaube an unsere wahrscheinlichste Position bereits **zwischen den Messungen** ändern
- Da auch die Geschwindigkeit in der Regel mit einem Fehler w behaftet ist, sind wir uns unserer Position immer unsicherer

- Unser Quadrocopter bleibt nun nicht mehr zwischen den Messungen am selben Ort, sondern er bewegt sich mit der Geschwindigkeit u
- Daher muss sich der Glaube an unsere wahrscheinlichste Position bereits **zwischen den Messungen** ändern
- Da auch die Geschwindigkeit in der Regel mit einem Fehler w behaftet ist, sind wir uns unserer Position immer unsicherer
- $\Rightarrow$ die Gaußverteilung muss breiter werden, $\Rightarrow$ die Varianz daher wachsen

- Unser Quadrocopter bleibt nun nicht mehr zwischen den Messungen am selben Ort, sondern er bewegt sich mit der Geschwindigkeit u
- Daher muss sich der Glaube an unsere wahrscheinlichste Position bereits **zwischen den Messungen** ändern
- Da auch die Geschwindigkeit in der Regel mit einem Fehler w behaftet ist, sind wir uns unserer Position immer unsicherer
- $\Rightarrow$ die Gaußverteilung muss breiter werden, $\Rightarrow$ die Varianz daher wachsen
- Uns interessiert nun die Gaußverteilung kurz vor der nächsten Messung x_2 unter Berücksichtigung der Geschwindigkeit

neues Szenario-mit Bewegung

$$P(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2|x_1)P(x_1) \;\; \mathrm{d}x_1 \text{ (Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit)}$$

neues Szenario-mit Bewegung

$$P(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2|x_1)P(x_1) \; dx_1 \text{ (Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit)}$$

- $P(x_2|x_1)$ bezeichnet das Übergangsmodell, also die Änderung zwischen den Messungen
- $P(x_1)$ ist die Gaußverterteilung, die sich nach der letzten Messung ergeben hat

Bestimmung des Übergangsmodells

- Das Übergangsmodell $P(x_2|x_1)$ ist wieder eine Gaußverteilung, die den Zusammenhang zwischen x_2 und x_1 beschreibt, hier also:

$$P(x_2|x_1) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_2 - x_1)^2}{\sigma_w^2}\right)}$$

Bestimmung des Übergangsmodells

- Das Übergangsmodell $P(x_2|x_1)$ ist wieder eine Gaußverteilung, die den Zusammenhang zwischen x_2 und x_1 beschreibt, hier also:

$$P(x_2|x_1) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_2-x_1)^2}{\sigma_w^2}\right)}$$

- Dabei errechnet sich x_2 aus x_1 in diesem Fall sehr simpel:

$$x_2 = x_1 + u \cdot \Delta t$$

- der Fehlervektor w trägt seine Standardabweichung σ_w bei.

Lösen der Apriori-Gleichung

- insgesamt erhalten wir folgendes Integral

$$P(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2|x_1)P(x_1)dx_1$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_2-x_1)^2}{\sigma_w^2}\right)} \cdot \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)} dx_1$$

- mit $x_2 = x_1 + u \cdot \Delta t + w$

Lösen der Apriori-Gleichung

- dem Aufmerksamen zuhörer fällt auf, dass wir alles unabhängig von x_1 vor das Integral ziehen können, sowie

Lösen der Apriori-Gleichung

- dem Aufmerksamen zuhörer fällt auf, dass wir alles unabhängig von x_1 vor das Integral ziehen können, sowie
- eine neue Normalisierungskonstante α' einführen können, und

Lösen der Apriori-Gleichung

- dem Aufmerksamen zuhörer fällt auf, dass wir alles unabhängig von x_1 vor das Integral ziehen können, sowie
- eine neue Normalisierungskonstante α' einführen können, und
- wieder mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die e-Funktion in einen Term abhängig von x_1 und einen unabhängig davon zerlegen können

Lösen der Apriori-Gleichung

- dem Aufmerksamen zuhörer fällt auf, dass wir alles unabhängig von x_1 vor das Integral ziehen können, sowie
- eine neue Normalisierungskonstante α' einführen können, und
- wieder mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die e-Funktion in einen Term abhängig von x_1 und einen unabhängig davon zerlegen können
- Letztendlich bleibt ein konstanter Term vor dem Integral und ein Integral über den gesamten Wertebreich der e-Funktion der 1 ergibt

Lösen der Apriori-Gleichung

- es ergibt sich letztendlich folgender Zusammenhang direkt nach der letzten Messung und der Parameter (μ, σ) direkt vor der nächsten Messung:

$$\hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_1 + u\Delta t$$
$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_w^2 \Delta t$$

Zusammenführen der bisherigen Ergebnisse

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}

Zusammenführen der bisherigen Ergebnisse

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}
2. Bestimmen der ersten Messung $\Rightarrow N(\mu_0, \sigma_0)$, $\hat{x}(t_0)$ als beste Positionsschätzung

Zusammenführen der bisherigen Ergebnisse

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}
2. Bestimmen der ersten Messung $\Rightarrow N(\mu_0, \sigma_0)$, $\hat{x}(t_0)$ als beste Positionsschätzung
3. Errechnen der Prognose $\hat{x}^-(t+1)$, kurz vor der nächsten Messung $t+1 \Rightarrow N(\hat{\mu}^-(t), \sigma_t^2 + \Delta t \cdot \sigma_w)$

Zusammenführen der bisherigen Ergebnisse

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}
2. Bestimmen der ersten Messung $\Rightarrow N(\mu_0, \sigma_0)$, $\hat{x}(t_0)$ als beste Positionsschätzung
3. Errechnen der Prognose $\hat{x}^-(t+1)$, kurz vor der nächsten Messung $t+1 \Rightarrow N(\hat{\mu}^-(t), \sigma_t^2 + \Delta t \cdot \sigma_w)$
4. Bestimmen des Kalmangains $K(t+1) = \frac{\sigma_t^2 + \Delta t \cdot \sigma_w}{(\sigma_t^2 + \Delta t \cdot \sigma_w)^2 + \sigma_{t+1}^2}$

Zusammenführen der bisherigen Ergebnisse

1. Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}
2. Bestimmen der ersten Messung $\Rightarrow N(\mu_0, \sigma_0)$, $\hat{x}(t_0)$ als beste Positionsschätzung
3. Errechnen der Prognose $\hat{x}^-(t+1)$, kurz vor der nächsten Messung $t+1 \Rightarrow N(\hat{\mu}^-(t), \sigma_t^2 + \Delta t \cdot \sigma_w)$
4. Bestimmen des Kalmangains $K(t+1) = \frac{\sigma_t^2 + \Delta t \cdot \sigma_w}{(\sigma_t^2 + \Delta t \cdot \sigma_w)^2 + \sigma_{t+1}^2}$
5. Korrektur der Prognose des aktuellen besten Zustandes $\hat{x}(t+1)$

Der erste Schritt

- Zunächst benötigt man sein Modell, wie errechnet sich die Modellgröße x_t aus dem vorherigen Zustand x_{t-1}

$$x_2 = x_1 + u \cdot \Delta t + w$$

Die erste Messung

- Bestimmen der ersten Messung als beste Positionsschätzung

$$\hat{x}_0 = z_0 \quad \text{Sei } z_0 \text{ hier die erste Messung}$$

Apriori Gleichung

- Bestimmen der besten Vorhersage kurz vor der Messung zur Zeit $t+1$

$$x_{t+1}^{-} = \hat{x}(t) + u\Delta t$$
$$(\sigma_{t+1}^{-})^2 = \sigma_t^2 + \sigma_w^2 \Delta t$$

Kalman Gain

- Bestimmen des Kalmangains $K(t+1)$ bei nun bekannter Messung zum Zeitpunkt $t+1$

$$K_{t+1} = \frac{(\sigma_{t+1}^{-})^2}{(\sigma_{t+1}^{-})^2 + \sigma_{z_{t+1}}^2}$$

Aposteriori

- Korrektur der Prognose des aktuellen besten Zustandes $\hat{x}(t+1)$ mit neuer Messung z_{t+1}

$$\hat{x}_{t+1} = x^-_{t+1} + K_{t+1} \cdot [z_3 - x^-_{t+1}] \text{ Mittelwertgleichung}$$

$$\sigma^2_{t+1} = (\sigma^-_{t+1})^2 - K_{t+1} \cdot (\sigma^-_{t+1})^2 \text{ Varianzgleichung}$$